DÉRIVATION

1. : Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes, et tracer les courbes au voisinage de 0 ; quelle est la morale de l'histoire ?

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

   (b) $g(x) = \cos\sqrt{x}$

   (c) $h(x) = \sqrt{\sin(x^4)}$

2. : Montrer que $f : \left| \begin{array}{l} x \neq 0 \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x} \\ 0 \mapsto 0 \end{array} \right.$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$.

3. : Déterminer l'ensemble de définition D puis l'ensemble D_1 sur lequel on est sûr que la fonction f est dérivable d'après les théorèmes généraux, puis calculer $f'(x)$ pour x dans D_1 ; simplifier et factoriser au maximum.

   (a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(2x+3)^3}$

   (b) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{(2x^2-3)^3}$

   (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{(1-x\sqrt{x})^2}$

   (d) $f(x) = \tan^2\sqrt{x}$

4. : Applications de la petite règle de L'Hospital ; Calculer : $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}$; $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$; $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^r-a^r}{x^s-a^s}$;
   $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a\cos x - x\cos a}{\cos x^2 - \cos(ax)}$; $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x^3 - \cos a^3}{\cos(a^2x) - \cos(ax^2)}$; $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x^n-a^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, et f dérivable en a.

5. :

   (a) $f : x \mapsto \ln(\ln x)$. Déterminer $\mathcal{D}_f$. Calculer f'.

   (b) $g : x \mapsto \ln(\ln(\ln x))$. Déterminer $\mathcal{D}_g$. Calculer g'.

   (c) On pose alors $f_1 = \ln$ puis par récurrence : $f_n = \ln \circ f_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathcal{D}_{f_n}$.Calculer f_n'.

6. : On pose $f(x) = x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

   (a) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[\Leftrightarrow \alpha > 0$

   (b) Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1$

ÉTUDES DE FONCTIONS

7. : Etudier et tracer la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 3\sin^5 x - 5\sin^3 x + 1$.

8. : Etudier et tracer la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|}$ (bien étudier la dérivabilité en -1)

9. : Etudier et tracer la courbe de la fonction f définie par $g(x) = x\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|} = xf(x)$ (bien étudier la dérivabilité en -1, et les branches infinies quand x tend vers $+$ ou $-\infty$; il y a une asymptote).

10. : Etudier et tracer la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+x^3}}{x}$ (notamment : prolongement par continuité, dérivabilité aux bornes, variations, branches infinies, symétrie).

11. Etudier et tracer la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4-1}}{x+1}$ (notamment : dérivabilité en 1, variations, branches infinies).

12. :

    (a) Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

    (b) Montrer que la courbe de f est en fait un demi-cercle.

    (c) * Etudier suivant les valeurs de $a > 0$ les intersections entre la courbe de f et la parabole $y = \dfrac{x^2}{a}$. Faire une figure.

13. : On rappelle que la fonction racine cubique r est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $r'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pour $x \neq 0$.

    On pose $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$.

    (a) Etudier la dérivabilité de f en 1.

    (b) Déterminer son tableau de variations.

    (c) Montrer que $\dfrac{\sqrt[3]{1+u}-1}{u} \underset{u\to 0}{\to} 1/3$.

    (d) Etudier les branches infinies.

    (e) Tracer la courbe complète en indiquant bien l'asymptote, et les tangentes horizontales et verticales.

14. : Démonstration de la loi de Descartes, à partir du principe de Fermat, énonçant que la lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que la durée du parcours soit minimale.

    (a) Le plan, est rapporté à un repère Oxy ; la vitesse de la lumière est égale à v_1 dans le 1/2 plan $y > 0$, et à v_2 dans le 1/2 plan $y < 0$; on donne les points $A(0, h_1)$, $B(L, -h_2)$ et $M(x, 0)$ $(h_1, h_2 > 0)$; un rayon lumineux met un temps T pour suivre le trajet AMB. On appelle f la fonction qui à x fait correspondre T.

    (b) Calculer $T = f(x)$ en fonction de x, L, h_1, h_2, v_1, v_2.

    (c) Etudier f et montrer que f est minimale en x_0 vérifiant $\dfrac{x_0}{AM.v_1} = \dfrac{L-x_0}{BM.v_2}$.

    (d) En déduire la loi de Descartes.
    REM : cette démonstration a été faite par Maupertuis en 1744.